XI კლასი

1. ცნობილია, რომ $a>0$ და როცა $x\in[-8;-2]$, მაშინ $f(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^{ax+2}$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $6\frac{1}{4}$-ის ტოლია. იპოვეთ $f(-4a)$.

რადგან $a>0$ და $0<\frac{2}{5}<1$, ამიტომ $f(x)$ კლებადი ფუნქციაა და $[-8;-2]$ შუალედზე მისი უდიდესი მნიშვნელობა იქნება $f(-8)=\left(\frac{2}{5}\right)^{-8a+2}$, რაც პირობის თანახმად $6\frac{1}{4}$-ის ანუ $\frac{25}{4}$-ის ტოლია.

$\left(\frac{2}{5}\right)^{-8a+2}=\frac{25}{4}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{-8a+2}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$; $-8a+2=-2$; $a=\frac{1}{2}$. $f(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}x+2}$.

მაშინ $f(-4a)=f(-2)=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}\cdot(-2)+2}=\frac{2}{5}$

პასუხი: $\frac{2}{5}$

ა) შენიშნა, რომ $f(x)$ კლებადი ფუნქციაა

ბ) გამოთვალა $f(-8)=\left(\frac{2}{5}\right)^{-8a+2}$ ან $f(-4a)=\left(\frac{2}{5}\right)^{-4a^2+2}$

გ) დაწერა $\left(\frac{2}{5}\right)^{-8a+2}=\frac{25}{4}$ განტოლება

დ) იპოვა $a=\frac{1}{2}$

ე) მიიღო პასუხი $f(-4a)=\frac{2}{5}$

1 ქულა — ა) ან ბ)

2 ქულა — ა) და ბ)

3 ქულა — გ)

4 ქულა — დ)

5 ქულა — ე)

2. გამოთვალეთ 8^x+8^{-x}, თუ ცნობილია, რომ $4^x+4^{-x}=23$

$$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot2^x\cdot2^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2$$

$(2^x+2^{-x})^2=4^x+4^{-x}+2=25$, ამასთან $2^x+2^{-x}>0$ ე.ი. $2^x+2^{-x}=5$

$$8^x+8^{-x}=(2^x+2^{-x})^3-3\cdot2^x\cdot2^{-x}(2^x+2^{-x})=(2^x+2^{-x})^3-3\cdot(2^x+2^{-x})=5^3-3\cdot5=110$$

პასუხი: 110

ა) დაწერა $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ ან $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

ბ) დაწერა $4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2$ ან მისი ტოლფასი ტოლობა

გ) გამოთვალა $2^x+2^{-x}=5$

დ) დაწერა $8^x+8^{-x}=(2^x+2^{-x})^3-3(2^x+2^{-x})$ ან მისი ტოლფასი ტოლობა

ე) მიიღო პასუხი: $8^x+8^{-x}=110$

1 ქულა — ა

2 ქულა — ბ) ან დ)

3 ქულა — ბ) და დ) ან გ)

4 ქულა — გ) და დ)

5 ქულა — გ) და ე)

3. ამოხსენით განტოლება: $(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=4$

რადგან $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$, ამიტომ $2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$

$(2+\sqrt{3})^x+\frac{1}{(2+\sqrt{3})^x}=4$; $(2+\sqrt{3})^x\equiv y$. $y+\frac{1}{y}=4$

$y^2-4y+1=0$; $y_1=2-\sqrt{3}$ $y_2=2+\sqrt{3}$

$(2+\sqrt{3})^x=2-\sqrt{3}$ ან $(2+\sqrt{3})^x=2+\sqrt{3}$

$(2+\sqrt{3})^x=(2+\sqrt{3})^{-1}$ $x=1$

$x=-1$

პასუხი: $x=\pm 1$

ა) შენიშნა, რომ $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$

ბ) შემოიღო აღნიშვნა $(2+\sqrt{3})^x=y$ ან $(2-\sqrt{3})^x=y$

გ) მიიღო $y^2-4y+1=0$ ან მისი ტოლფასი განტოლება

დ) იპოვა $y_1=2-\sqrt{3}$ და $y_2=2+\sqrt{3}$

ე) მიიღო პასუხი $x=\pm 1$

1 ქულა — ა) ან ბ)

2 ქულა — ა) და ბ)

3 ქულა — გ)

4 ქულა — დ)

5 ქულა — ე)

თუ გამოიცნო ერთი ამონახსნი და შეამოწმა — 1 ქულა

თუ გამოიცნო ორივე ამონახსნი და შეამოწმა — 2 ქულა

4. ამოხსენით უტოლობა $27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x}-12\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{1-x}+19\geq 0$

$$27\cdot\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}-12\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}+19\geq 0$$

$$12\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}-18\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}+19\geq 0 \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}\equiv y$$

$$12y-\frac{18}{y}+19\geq 0$$

$$12y^2+19y-18\geq 0$$

$$y_1=-\frac{9}{4} \quad y_2=\frac{2}{3}$$

$$y\in\left(-\infty;-\frac{9}{4}\right]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$$

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}\leq-\frac{9}{4}\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}\geq\frac{2}{3}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing\\ -x\leq 1\end{array}\right. \quad x\geq -1$$

პასუხი: $x\in[-1;+\infty)$

ა) გამოჰყო $\frac{2}{3}$-ისა და $\frac{3}{2}$-ის ერთი და იგივე ხარისხი

ბ) შემოიღო აღნიშვნა, მაგ.: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}=y$

გ) მიიღო კვადრატული უტოლობა

დ) ამოხსნა კვადრატული უტოლობა

ე) დაწერა მაჩვენებლიანი უტოლობების გაერთიანება

ვ) მიიღო პასუხი.

1 ქულა — ა) ან ბ)

2 ქულა — გ)

3 ქულა — დ)

4 ქულა — ე)

5 ქულა — ვ)

5. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით დაამტკიცეთ, რომ $\forall n \in N$-თვის

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{1}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}$$

შევამოწმოთ $n=1$-სთვის $1-\frac{4}{1}=\frac{1+2}{1-2}$; $-3=-3$ ჭეშმარიტია.

დავუშვათ ჭეშმარიტება $n=k$-სთვის $\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{1}{(2k-1)^2}\right)=\frac{1+2k}{1-2k}$

და დავამტკიცოთ, რომ ჭეშმარიტი იქნება $n=k+1$-სთვის. ანუ ვაჩვენოთ, რომ $\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{4}{(2(k+1)-1)^2}\right)=\frac{1+2(k+1)}{1-2(k+1)}=\frac{2k+3}{-2k-1}$.

მართლაც $\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{4}{(2(k+1)-1)^2}\right)=\frac{1+2k}{1-2k}\cdot\left(1-\frac{4}{(2k+1)^2}\right)=$

$$=\frac{1+2k}{1-2k}\cdot\frac{(2k+1)^2-4}{(2k+1)^2}=\frac{2k+1}{1-2k}\cdot\frac{(2k-1)(2k+3)}{(2k+1)^2}=-\frac{2k+3}{2k+1}=\frac{2k+3}{-2k-1}$$ რ.დ.გ.

ტოლობა დამტკიცებულია $\forall n \in N$-თვის.

ა) შემოწმება $n=1$-სთვის

ბ) ჩაწერა მოცემული ტოლობა $n=k$-თვის და $n=k+1$-თვის.

გ) აღნიშნა ინდუქციის ბიჯი

დ) ბიჯი დაამტკიცა ხარვეზებით ან არასრულად.

ე) დაამტკიცა სრულყოფილად.

1 ქულა — ა) ან ბ) ან გ)

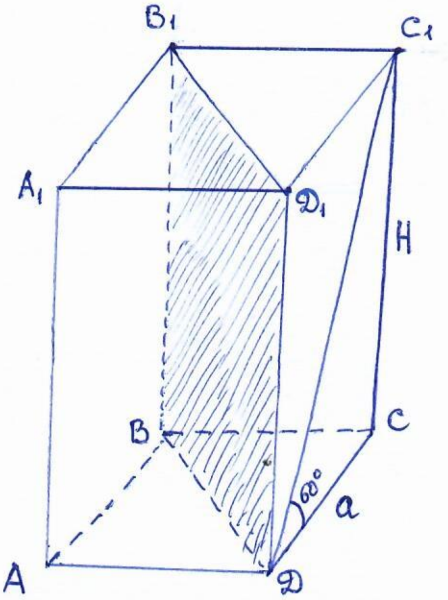
2 ქულა — ა) და ბ) ან ა) და გ)

3 ქულა — ა) ბ) გ)

4 ქულა — ა) ბ) დ)

5 ქულა — ე)

6. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალური კვეთის ფართობია $6\sqrt{6}$ სმ². გვერდითი წახნაგის დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს 60°-იან კუთხეს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.



$CD \equiv a, \quad CC_1 \equiv H$

$V = S_{ფ} \cdot H = a^2 \cdot H$

$S_{კვ} = BD \cdot H = a\sqrt{2} \cdot H = 6\sqrt{6}$

$a \cdot H = 6\sqrt{3}$

$\triangle C_1CD$ მართკუთხაა $H = a\,tg 60^\circ = a\sqrt{3}$

$a \cdot a\sqrt{3} = 6\sqrt{3}, \quad a^2 = 6, \quad a = \sqrt{6}$

$H = \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{2}$

$V = 6 \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$ პასუხი: $18\sqrt{2}$ სმ³

ა) სწორი ნახაზი კვეთის და 60°-იანი კუთხის მითითებით.

ბ) დაწერა მოცულობის ფორმულა $V = S_{ფ} \cdot H$.

გ) დაწერა $S_{კვ} = aH\sqrt{2}$

დ) დაწერა $H = a\sqrt{3}$

ე) დაწერა $aH = 6\sqrt{3}$

ვ) გამოთვალა ფუძის გვერდი ან ფართობი

ზ) გამოთვალა სიმაღლე

თ) იპოვა მოცულობა

1 ქულა — ა) ან ბ) ან გ) ან დ)

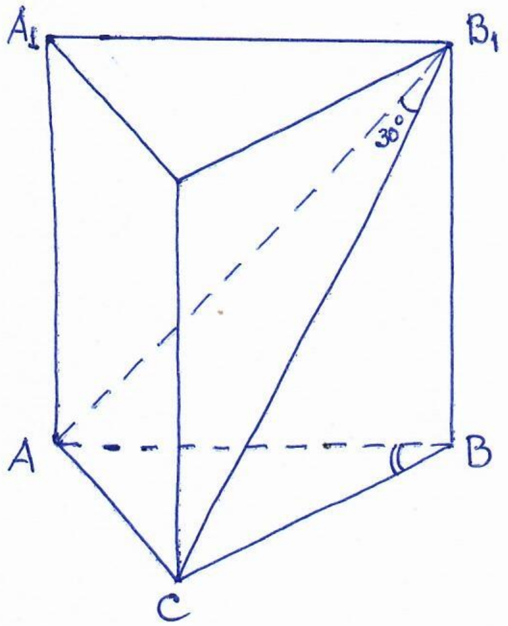
2 ქულა — ა), ბ), გ), დ) პუნქტებიდან რომელიმე ორი, ან ე)

3 ქულა — ვ) ან ზ)

4 ქულა — ე) ვ) ან ე) ზ)

5 ქულა — თ)

7. $ABCA_1B_1C_1$ მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძე ABC მართკუთხა სამკუთხედია. $\angle ACB=90^\circ$, $\sin\angle ABC=0{,}6$; $AB_1=12$ და $\angle CB_1A=30^\circ$. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.



$$V=S_ფ\cdot H$$

B_1C დახრილის გეგმილი ფუძის სიბრტყეზე არის BC და $BC\perp AC$. სამი მართობის თეორემის თანახმად $B_1C\perp AC$.

მართკუთხა $\triangle ACB_1$-დან $AC=\dfrac{AB_1}{2}=6$

მართკუთხა $\triangle ACB$-დან $AB=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{6}{0{,}6}=10$

$BC=\sqrt{10^2-6^2}=8$

მართკუთხა $\triangle ABB_1$-დან $H=\sqrt{AB_1^2-AB^2}=\sqrt{144-100}=$
$=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$

$S_ფ=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$

$V=24\cdot 2\sqrt{11}=48\sqrt{11}$

პასუხი: $48\sqrt{11}$

ა) დაწერა $V=S_ფ\cdot H$ ფორმულა

ბ) აჩვენა, რომ $B_1C\perp AC$

გ) გამოთვალა AC გვერდის სიგრძე

დ) იპოვა ფუძის ორი გვერდი

ე) იპოვა პრიზმის სიმაღლე

ვ) იპოვა ფუძის ფართობი

ზ) იპოვა მოცულობა

1 ქულა — ა) ან ბ)

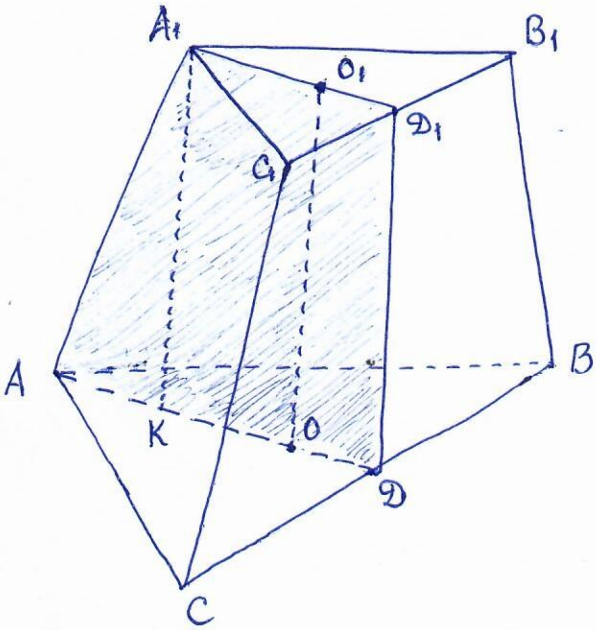
2 ქულა — ა)+ბ) ან გ)

3 ქულა — დ)

4 ქულა — ა)ე) ან ა)ვ)

5 ქულა — ზ)

8. წესიერი წაკვეთილი სამკუთხა პირამიდის ფუძეების გვერდების სიგრძეებია 2 სმ და 4 სმ. გვერდითი წიბოები ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია 60°-იანი კუთხით. იპოვეთ გვერდით წიბოსა და დიდი ფუძის ცენტრზე გამავალი კვეთის ფართობი.



კვეთა პირამიდის ფუძეებს კვეთს პარალელურ წრფეებზე, შესაბამისად, კვეთაში მიღებული AA_1D_1D ოთხკუთხედი ტრაპეციაა.

$$S_{კვ} = \frac{AD + A_1D_1}{2} \cdot A_1K \quad (A_1K \perp AD)$$

$$AD = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}; \quad A_1D_1 = \frac{A_1B_1\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$\triangle AKA_1$ მართკუთხაა, $\angle A_1AK = 60^\circ$

$$AK = OA - OK = OA - O_1A_1 = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$A_1K = AK \cdot tg 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 2$$

$$S_{კვ} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 3\sqrt{3}$$

პასუხი: $3\sqrt{3}$ სმ^2

ა) ააგო პირამიდის კვეთა

ბ) დაწერა კვეთის ფართობის ფორმულა

გ) იპოვა AD და A_1D_1

დ) იპოვა AK მონაკვეთის სიგრძე

ე) იპოვა AO და A_1O_1

ვ) იპოვა A_1K სიმაღლე

ზ) გამოთვალა კვეთის ფართობი

1 ქულა — ა)

2 ქულა — ა) და ბ)

3 ქულა — ა) ბ) გ) ან ა) ე) დ)

4 ქულა — ა) ბ) ვ)

5 ქულა — ზ).